Musterlösung der Klausur Nr. 2

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1)$

b) $f'_k(x) = k \cdot e^{\sin(kx)} \cdot \cos(kx) \cdot k = = k^2 \cdot \cos(kx) \cdot e^{\sin(kx)}$

c) $f'(x) = 2 \cdot \ln(x^2 + x) \cdot \frac{2x+1}{x^2+x}$

d) $f'(x) = \frac{-x^2 e^{2-x} - 2x e^{2-x}}{x^4} = \frac{-e^{2-x}(x+2)}{x^3}$

Aufgabe 2

a) $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{a}\cos(ax)$

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$; also: $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x$

c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

$u'(x) = \cos(x) \Rightarrow u(x) = \sin(x)$

$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$2\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x)$$

also: $F(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$

d) $f(x) = x^n \cdot \ln(x)$; wobei $n \in N$ gilt.

$u'(x) = x^n \Rightarrow u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x^n \ln(x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^n\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{(n+1)}\right)$$

Aufgabe 3

Teil a)

P(0/2) und Q(4/6) und $f_A(x) = mx + b$

$f_A(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$m = \frac{6-2}{4-0} = 4$

also: Modell A: $f_A(x) = x + 2$

P(0/2) und Q(4/6) und Modell B: $f_B(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$

$f_B(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$f_B(4) = 6 \Leftrightarrow 2a + 2 = 6 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

also: Modell B: $f_B(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2$

P(0/2) und Q(4/6) und $f_C(x) = a \cdot e^{bx}$

$f_C(0) = 2 \Leftrightarrow a = 2$

$f_C(4) = 6 \Leftrightarrow 6 = 2\, e^{4b} \Leftrightarrow 3 = e^{4b} \Leftrightarrow b = \ln(3) : 4 \approx 0{,}27465$

also: Modell C: $f_3(x) = 2 \cdot e^{0{,}27465x}$

Teil b)

$d(x) = f_1(x) - f_3(x) = x + 2 - 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}$

$d'(x) = 1 - \frac{\ln(3)}{2}\, e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}$

$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\ln(3)}{2}\, e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \Leftrightarrow \frac{2}{\ln(3)} = e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{\ln(3)}\right) \cdot \frac{4}{\ln(3)} \approx 2{,}18$

Teil c)

$$V_1 = \int_0^4 (x+2)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^4 = 16 \text{ VE}$$

$$V_2 = \int_0^4 (2\sqrt{x}+2)\, dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x\right]_0^4 = 18\frac{2}{3} \text{ VE}$$

$$V_3 = \int_0^4 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}\, dx = 2\left[\frac{4}{\ln(3)}\, e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}\right]_0^4 \approx 14{,}5638 \text{ VE}$$

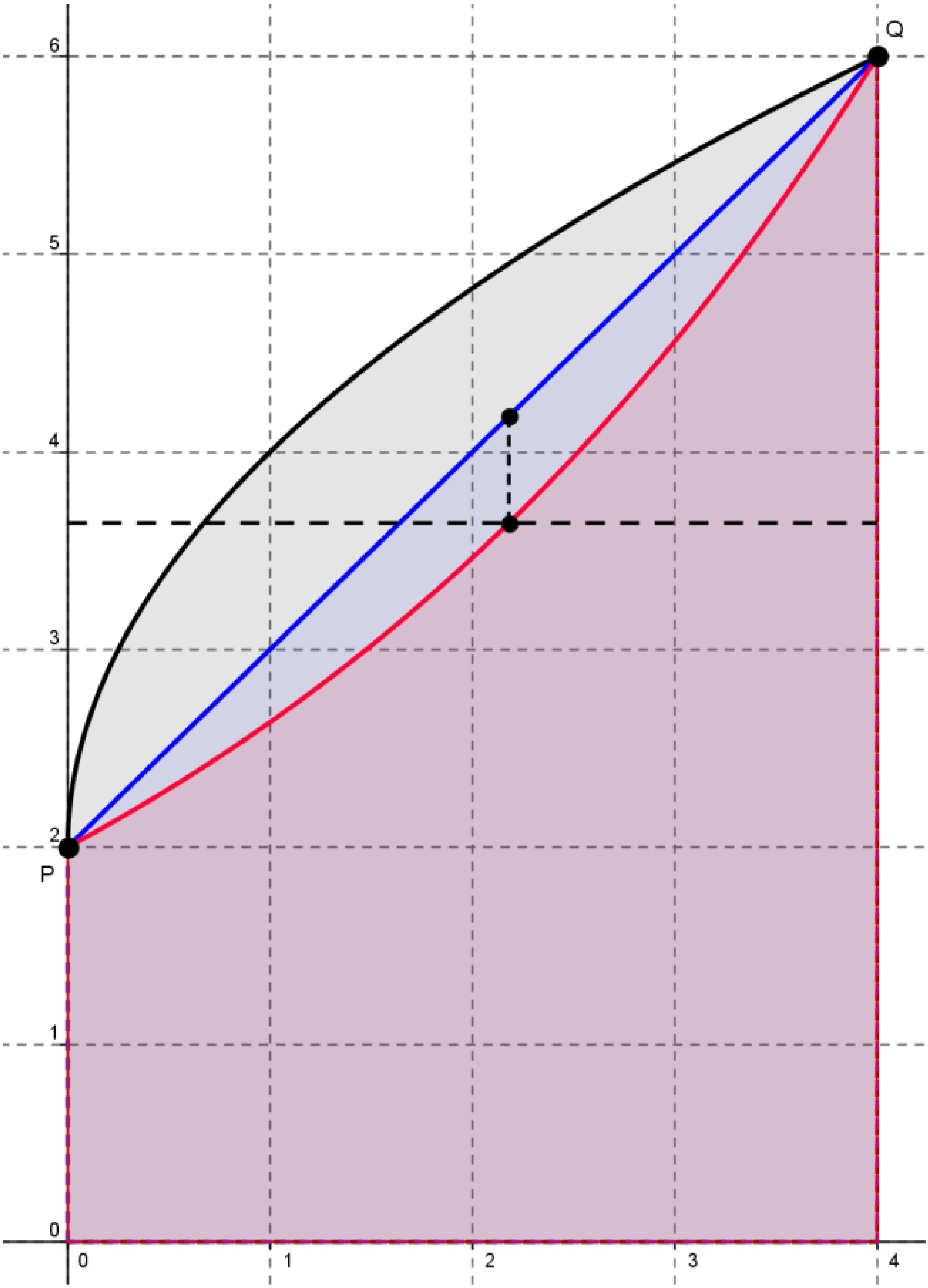
Teil d)

$$m = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 2e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\ln(3)}\, e^{\frac{\ln(3)}{4} \cdot x}\right]_0^4 \approx 3{,}641$$

Dies ist die über dem Intervall I **durchschnittlich** ausgetretene Gasmenge!

Die Skizze auf der folgenden Seite veranschaulicht nochmals sämtliche Ergebnisse dieser Aufgabenstellung!

Skizze



Aufgabe 4

$P(1/4e^{-a})$

$f'(x) = -4ae^{-ax}$; also $f'(1) = -4ae^{-a}$

$t(x) = -4ae^{-a}x + b$

$4e^{-a} = -4ae^{-a} + b \Leftrightarrow b = 4e^{-a} + 4ae^{-a} = 4e^{-a}(1 + a)$

$t(x) = -4ae^{-a}x + 4e^{-a}(1 + a)$

Nullstelle von t: $4ae^{-a}x = 4e^{-a}(1 + a) \Leftrightarrow x = 4e^{-a}(1 + a) : 4ae^{-a} = 1 + \frac{1}{a}$

$$F = \int_0^1 4e^{-ax}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{a}-1\right)\cdot 4e^{-a} = -\frac{4}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^1 + \frac{2}{a}e^{-a} = -\frac{4}{a}e^{-a} + \frac{4}{a} + \frac{2}{a}e^{-a}$$

$$= \frac{4}{a} - \frac{2}{a}e^{-a} = \frac{2}{a}\cdot\left(2 - e^{-a}\right)$$

Aufgabe 5

Teil a)

$\cos(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

Teil b)

$f'(x) = -\sin(x) \cdot e^x + \cos(x) \cdot e^x = e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$

$e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in Z$

Bezüglich des betreffenden Intervalls liegt der einzige Kandidat also bei $x = \frac{\pi}{4}$.

Für die y-Koordinate gilt näherungsweise $y \approx 1{,}55$

Teil c)

$u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$

$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$

also: $\int \sin(x)\cdot e^x\,dx = \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x\,dx$

somit insgesamt:

$$\int \cos(x)\cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot e^x + \int \sin(x)\cdot e^x\,dx$$

$$= \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x)\cdot e^x\,dx$$

daraus folgt:

$$2 \cdot \int \cos(x)\cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(x)\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\cos(x) + \sin(x))$$

Auswertung:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^x\,(\sin(x)+\cos(x))\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2{,}51 \text{ FE}$$