Aufgabe Nr. 1

Gegeben sind die vier Punkte A(4/2/1), B(1/8/1), C(1/2/4) und S(6/6/6) des $\mathbb{R}^3$.

a) Die drei Punkte A, B und C definieren eindeutig eine Ebene E im Raum. Bestimme die Gleichung dieser Ebene E in Parameter-, Punkt-Normalen- sowie Koordinatenform und skizziere E mit Hilfe des Spurdreiecks!

Mögliches Ergebnis: E: 2x + y + 2z = 12

b) Die drei Punkte A, B und C bestimmen zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Berechne den **Lotfußpunkt F** der Pyramidenspitze S in der Pyramidengrundfläche ΔABC sowie das **Volumen der Pyramide**!

c) Gib die Gleichung derjenigen Ebene E_2 an, die zum einen parallel zu der Ebene E verläuft und zum anderen durch die Pyramidenspitze S geht!

d) Gib die Gleichung einer Ebene E_3 an, die zum einen orthogonal zu der Ebene E verläuft und zum anderen durch die Pyramidenspitze S geht!

e) Der Schwerpunkt P eines Dreiecks ΔABC im Raum berechnet sich über die Formel $\vec{p} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Den **Schwerpunkt einer Pyramide** wiederum definiert man als den Schnittpunkt zweier **Schwerelinien der Pyramide**. Diese Schwerelinien verlaufen dabei von einem Eckpunkt der Pyramide zum Schwerpunkt der gegenüberliegenden Pyramidenseite. Berechne den Schwerpunkt der Pyramide ABCS explizit über den Schnitt zweier Schwerelinien!

f) Unter welchem Winkel schneidet die Pyramidenseitenkante, die durch die Punkte A und S beschrieben wird, die Ebene E, in der die Bodenfläche der Pyramide liegt?

Aufgabe Nr. 2

Gegeben ist die Ebenenschar $\mathbf{E_a}$: $2x + (a - 3) \cdot y + a \cdot z = 6 - 2a$; wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt.

a) Bestimme eine Parameter- und eine Punkt-Normalenform der Ebene $\mathbf{E_1}$.

Mögliches Ergebnis in Punkt-Normalenform: E_1: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

b) Ermittle die Gleichung der Schnittgeraden g von $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ sowie den Schnittwinkel beider Ebenen!

c) Berechne den Abstand des Punktes P(4/−1/9) von der Ebene $\mathbf{E_1}$!

d) Bestimme diejenige Ebene der Schar $\mathbf{E_a}$, die den Koordinatenursprung enthält!

e) Erläutere die Rechnung in den Zeilen (1) – (3) in dem nebenstehenden Kasten und deute das Ergebnis!

f) Ermittle diejenige Ebene der Schar $\mathbf{E_a}$, die die y-Achse unter einem Winkel von 45° schneidet!

(1) $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ a-3 \\ a \end{pmatrix}$

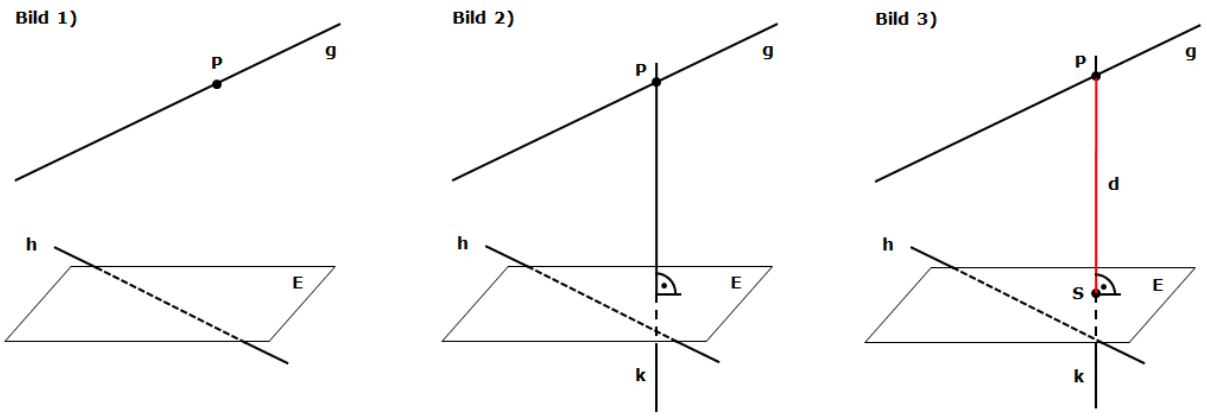
(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ a-3 \\ a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\Rightarrow r = 2$

$\Rightarrow$ Widerspruch

Aufgabe Nr. 3

Der **Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden** wird als die **kürzest mögliche Verbindungsstrecke** zwischen diesen Geraden definiert. Die Bildsequenz beschreibt ein Verfahren zur Abstandsbestimmung windschiefer Geraden.



a) Erläutere allgemein das in der Bildsequenz dargestellte Verfahren!

b) Ermittele dann den Abstand zwischen den beiden im Folgenden angegebenen Geraden g und h! Es darf dabei vorausgesetzt werden, dass g und h windschief sind.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$